



TITLE:

# クリスタライン曲率流によって動く多角形領域の挙動(波動現象の数理と応用)

AUTHOR(S):

石渡, 哲哉

---

CITATION:

石渡, 哲哉. クリスタライン曲率流によって動く多角形領域の挙動(波動現象の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1543: 206-215

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80700>

RIGHT:

## クリスタライン曲率流によって動く多角形領域の挙動

岐阜大学 教育学部 石渡 哲哉 (Tetsuya Ishiwata)<sup>1</sup>

Faculty of Education

Gifu University

### 1 はじめに

物質の異なる相を隔てる境界面あるいは界面の運動について考える。一般に、界面の運動は界面のもつ情報だけでなく、界面内部や外部の影響にも依存すると考えられるが、ここでは主に界面の曲率に依存した界面運動のみを考える。このような運動を、一般に曲率運動という。代表的な曲率運動には、平均曲率流方程式やガウス曲率流方程式、リッチ曲率流方程式などがある。平均曲率流方程式の起源は、古くは 1950 年代の材料科学の論文にあり、金属の焼きなましの過程を記述するモデルとして登場し、1980 年代ごろより活発に数理的研究が行われている。1990 年前後に、結晶界面のように平らな面と角を持つような界面の曲率運動の基本的枠組みが、S. Angenent and M.E. Gurtin [2] および J.E. Taylor [15] によって独立に与えられた。現在この枠組みの運動は、Crystalline motion と呼ばれている。1990 年代後半からは、曲率や角度などの量だけでなく、全周長や面積といった非局所的な量に依存したモデルや、外部拡散場とカップリングした問題なども扱われはじめた。また、最近では画像処理への応用なども行なわれている。

本小論では最も単純な曲率運動として、次のクリスタライン曲率流 (crystalline curvature flow):

$$V_j = H_j \quad (\text{CCF})$$

を含むように一般化された曲率運動:

$$V_j = g(\theta_j, H_j) \quad (\text{GCCF})$$

を考え、これによって動く平面上の多角形領域  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$  の挙動について考察する。ここで、 $V_j$ ,  $\theta_j$ ,  $H_j$  はそれぞれ多角形の第  $j$  辺の内向き法線速度、第  $j$  辺の法線角度、第  $j$  辺のクリスタライン曲率を表す。また、 $g: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である。また、対象とする多角形は”許容多角形”と呼ばれるクラスで考える。それぞれの定義および  $g$  の条件などについては後述する。図 1 は、(CCF) によって動く非凸多角形の数値計算例である。左が初期図形、右が時間発展の様子を示している。非凸多角形が次第に小さくなり、最後に一点に収縮していることが分かる。

さて、本小論で考える  $g$  の範疇では解多角形の凸性が保存されるため、初期図形が凸である場合には比較的よく研究されてきている。(例えば、[1],[12, 13], [14] やその参考文献参照。) それに対して、初期図形が非凸の場合は取り扱いが難しい。先駆的な仕事として、K. Ishii and H. M. Soner [10] や M.-H. Giga and Y. Giga [5] の研究がある。以下ではこ

<sup>1</sup>e-mail: tisiwata@gifu-u.ac.jp

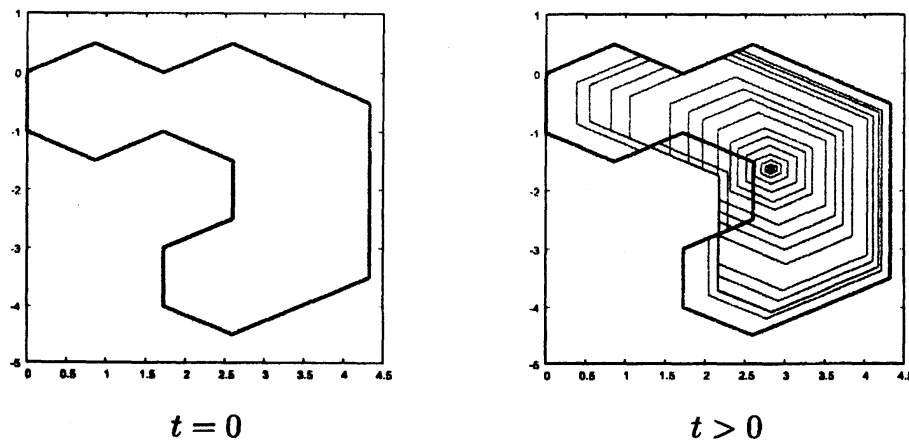


図 1: クリスタライン曲率流  $V_j = H_j$  によって動く非凸多角形の数値計算例。(左:初期図形、右:時間発展の様子。)

これらの仕事を再考し、非凸の場合に“許容多角形”と呼ばれる多角形のクラスで解を扱うための条件を整理し、その場合の解多角形の挙動について議論をする。まず、第2節では曲率等の定義を行ない、第3節でクリスタライン曲率流について述べる。そこで、起こりうる特異性について説明し、第4節ではその特異性を超えて解を延長するための条件を整理する。第5節では第4節で明らかになった条件下で解の挙動、特に形状変化の過程について明らかにする。最後に、今後の興味・課題について述べる。

## 2 ウルフ図形、許容多角形、クリスタライン曲率

まず、ウルフ図形について説明する。この図形は、許容多角形のクラスやクリスタライン曲率の定義で重要な役割を果たす。 $\sigma = \sigma(\theta)$  を  $S^1$  上で定義された正值関数とする。この  $\sigma$  は、物質の表面エネルギー分布を与える。一定面積を囲む曲線  $\Gamma$  で、総表面エネルギー  $\int_{\Gamma} f(\mathbf{n}) ds$  (ここで、 $f(\mathbf{n}) = \sigma(\theta)$ ,  $\mathbf{n} = -(\cos \theta, \sin \theta)$  である。) を最小にする図形を考える。この最小化問題はウルフ (Wulff) の問題と呼ばれ、解図形は

$$\mathcal{W}_{\sigma} = \bigcap_{\theta \in S^1} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos \theta + y \sin \theta \leq \sigma(\theta)\}$$

で与えられる。この図形は結晶の平衡形を表している図形で、以下ウルフ図形と呼ぶことにする。例えば、 $\sigma(\theta) \equiv 1$  のときのウルフ図形は円となる。 $\sigma$  の与え方により様々な図形が得られるが、ここでは  $\mathcal{W}_{\sigma}$  が凸多角形の場合を考える。このとき、 $\sigma$  はクリスタライン・エネルギーと呼ばれる。以下この場合を考え、 $\mathcal{W}_{\sigma}$  を  $N_{\sigma}$  辺凸多角形とする。法線角度集合  $\Phi_{N_{\sigma}}$  を

$$\Phi_{N_{\sigma}} = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N_{\sigma}-1}\}$$

とする。ここで、 $\varphi_n \in S^1$  は  $\mathcal{W}_{\sigma}$  の第  $n$  辺の法線角度であり、 $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{N_{\sigma}-1} < \varphi_{N_{\sigma}} := \varphi_0 + 2\pi$  とする。

次に、許容多角形について述べる。領域  $\Omega$  を  $N$  個の頂点  $p_j = (x_j, y_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) をもつ多角形領域の内部とする。添え字は反時計回りとし、 $p_N (= (x_N, y_N)) = p_0$  とする。ここで、 $S_j = \{(1-t)(x_j, y_j) + t(x_{j+1}, y_{j+1}) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  を第  $j$  辺とすると、境界  $\mathcal{P} = \partial\Omega$  は  $\mathcal{P} = \bigcup_{j=0}^{N-1} S_j$  と書くことができる。 $\theta_j$  を  $S_j$  の法線角度とすると、内向き単位法線ベクトル  $N_j$  は、 $N_j = -(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$  で与えられる。このとき、次の2つを満たす多角形を、許容 (admissible) 多角形という：

1. 各辺の法線角度は、ウルフ図形のいずれかの辺の法線角度と一致する。つまり、 $\theta_j \in \Phi_{N_\sigma}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) である。
2. 隣の辺の法線角度は、ウルフ図形の隣り合うどちらかの辺の法線角度と一致する。つまり、 $\theta_j = \varphi_k \in \Phi_{N_\sigma}$  とすると、 $\theta_{j+1}, \theta_{j-1} \in \{\varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}\}$  である。

以下、多角形は許容多角形のクラスで考える。<sup>2</sup>

許容多角形  $\Omega$  に対して定義される次の量：

$$H_j = \chi_j \frac{l_\sigma(\theta_j)}{d_j}$$

をクリスタライン曲率という。ここで、 $d_j$  は  $S_j$  の長さ、 $l_\sigma(\theta_j)$  は  $\varphi_k = \theta_j$  を満たす  $\mathcal{W}_\sigma$  の第  $k$  辺の長さを表す。 $\chi_j$  は遷移数 (transition number) と呼ばれ、内向き法線方向に凸のとき 1、凹のとき -1、それ以外のとき 0 と定義される量である。よって、 $\Omega$  が凸許容多角形であれば、 $\chi_j \equiv +1$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) であり、ウルフ図形の各辺のクリスタライン曲率は常に 1 となる。

### 3 クリスタライン曲率流

扱う多角形を許容多角形のクラスに限定し、総表面エネルギー  $\sum_{j=0}^{N-1} \sigma(\theta_j) d_j$  の勾配流を考えると、クリスタライン曲率流 (CCF):  $V_j = H_j$  を得る<sup>3</sup>。ここでは、初期多角形  $\Omega(0)$  を  $N$  辺許容多角形として、 $V_j = H_j$  の一般化：

$$V_j = g(\theta_j, H_j) \quad (\text{GCCF})$$

によって動く解多角形族  $\{\Omega(t)\}_{t \in [0, T]}$  を考える。ただし、関数  $g$  は次を満たすとする：

**Assumption (G1):**  $g(\theta_j, \lambda)$  は  $\lambda$  に関して  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  で局所リプシッツ連続である。

**Assumption (G2):** 全ての  $\theta_j \in \Phi_{N_\sigma}$  に対して、 $g(\theta_j, \lambda)$  は  $\lambda$  に関して単調増大であり、 $g(\theta_j, 0) = 0$ ,  $g(\theta_j, \lambda) > 0$  ( $\lambda > 0$ ),  $g(\theta_j, -\lambda) = -g(\theta_j, \lambda)$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\theta_j, \lambda) = +\infty$  を満たすとする。

<sup>2</sup>近年、許容多角形を含むより広いクラスとして、“本質的許容多角形”という概念が提案され、画像処理に用いられている。([9] を参照。) 本小論の結果も、ある程度はこの本質的許容多角形まで拡張できるが、解多角形の挙動などより複雑になる。

<sup>3</sup>ウルフ図形が円の場合で滑らかな界面を考え、総表面エネルギーの勾配流を考えると、曲率流方程式  $V = \kappa$  ( $\kappa$ : 曲率) が得られる。一般に、 $\sigma$  が  $C^2$  級の場合重み付曲率流方程式  $V = (\sigma + \sigma_{\theta\theta})\kappa$  が得られる。

一般に、クリスタライン曲率流方程式は、

$$\dot{d}_j(t) = (\cot(\theta_{j+1} - \theta_j) + \cot(\theta_j - \theta_{j-1}))V_j - \frac{1}{\sin(\theta_j - \theta_{j-1})}V_{j-1} - \frac{1}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)}V_{j+1}$$

( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) と書き換えることができるので、仮定 (G1) から時間局所解の存在と一意性は ODE の一般論から従い、 $\Omega(t)$  が  $N$  辺許容多角形である限り解を延長することができる。しかし、仮定 (G2) から有限時間で少なくとも 1 つの辺の長さが 0 になることが示される。つまり、解多角形は  $N$  辺許容多角形のまま時間大域的には存在し得ない。ただし、辺が消滅したら直ちに許容性が壊れるわけではない。ある辺が消滅して出来る多角形が再び許容多角形になっていれば、辺の数は変わるものの許容多角形のクラスの中で解の時間発展を延長することができる。また、辺が消滅する前に解多角形が分裂する ( $= P(t)$  が自己交差する。) 可能性もある。<sup>4</sup> つまり、辺の消滅と解多角形の分裂という 2 つの特異性に対する考察が必要となる。次節では、ある条件下では解多角形の分裂は起きず、辺が消滅する場合も許容多角形のクラスの中で解の時間発展が継続できることを見る。

## 4 解の延長

次の 3 つの仮定を新たに設ける:

**Assumption (G3):** (flow の対称性) 任意の  $\theta \in S^1, \lambda \in \mathbb{R}$  に対して、 $g(\theta + \pi, \lambda) = g(\theta, \lambda)$  を満たす。

**Assumption (G4):** (増大度)  $g(\cdot, \lambda)$  の  $\lambda \rightarrow \infty$  での増大度は線形以上である:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} g(\cdot, \lambda) \lambda^{-2} d\lambda = \infty$$

**Assumption (W1):** (ウルフ図形の対称性)  $\sigma(\theta + \pi) = \sigma(\theta)$  を満たす。つまり、ウルフ図形  $\mathcal{W}_\sigma$  は原点对称である。

典型例として、関数  $g$  が曲率の冪の形に書けている場合を考えよう:

$$g(\theta, \lambda) = a(\theta_j) \text{sign}(\lambda) |\lambda|^\alpha \quad (\text{PCCF})$$

ここで、 $a(\theta) > 0, \alpha > 0$  であれば、(G1,2) を満たし、更に  $a(\theta + \pi) = a(\theta)$  であれば (G1-3) を満たす。更に、 $\alpha \geq 1$  であれば (G1-4) を満たす。(G4) の仮定は解多角形の収縮の様子を決定する際に重要で、この条件下では (GCCF) 一般に対し解多角形が線分状に潰れること (退化縮退) がないことが分かっている。([5])<sup>5</sup>

<sup>4</sup>この場合、 $P(t)$  で囲まれる領域  $\Omega(t)$  の動きを見るという視点を捨て平面曲線の運動を考えると、数学的には自己交差後も曲線の動きを追跡することは可能である。自己交差曲線に対する曲率流の研究としては、曲率流方程式  $V = \kappa$  に対する研究で [3] がある。この論文では、巻き数 2 の自己交差閉曲線の曲率が有限時間に爆発し解曲線がカスプをもつことや、その際の曲率の爆発オーダーについて議論されている。

<sup>5</sup> $\Omega(0)$  が凸の場合は (PCCF) については任意の  $\alpha < 1$  に対して退化縮退を起こす初期値が存在すること、および、その場合の縮退オーダーなどが分かっている。([1], [12, 13]) また、[8] では非凸の場合の退化縮退の具体例が示されている。

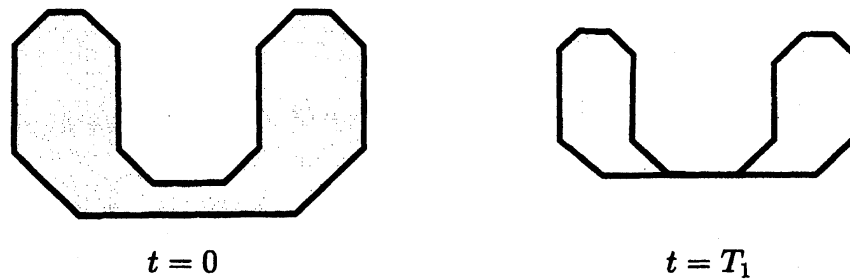


図 2: 条件 (G3) が成立しない場合.

以上の仮定のもと、次の定理を得る。

**定理 1**  $\Omega(0)$  を  $N$  辺許容多角形とし、(G1,2,3,4) および、(W1) を仮定する。このとき、有限時刻  $T_1 > 0$  が存在して、 $0 \leq \forall t < T_1$  に対して  $\Omega(t)$  は  $N$  辺許容多角形であり、ある  $j_0$  が存在して、 $\lim_{t \rightarrow T_1} d_{j_0}(t) = 0$  である。

更に、次の 2 つのうち、どちらかが起こる：

- (1)  $\Omega(t)$  は  $t \rightarrow T_1$  で一点に収縮する。つまり、全ての  $j$  に対して  $\lim_{t \rightarrow T_1} d_j(t) = 0$  である。
- (2) ある  $j_0$  が存在し、 $\inf_{0 \leq t < T_1} d_{j_0}(t) > 0$  である。このとき、消滅する辺のクリスタライン曲率は 0 である。また、 $t \rightarrow T_1$  での  $\Omega(t)$  の極限形状  $\Omega^*$  は  $N'$  辺許容多角形 ( $N' < N$ ) となる。

**Remark:** 同様の結果が、(CCF) に対して [10] で得られている。ただし、条件 (W1) が仮定されていない。また、[5] では [10] の結果が定理 1 と同じ条件下で拡張できるとコメントされている。更に、双方とも後述する凸化現象に対する主張が含まれている。しかし、(W1) を仮定しない場合、後述する図 4 にあるような反例を作ることができるし、[11] の結果から凸化現象は一般に成立しない。よって、証明を含めこれらの結果は再考が必要である。本研究のモチベーションの 1 つは、このあたりの状況を整理することにある。

定理 1 より、(2) の場合には  $\Omega^*$  を初期図形として、 $t \geq T_1$  に解の時間発展を延長できることがわかる。ここで、仮定した条件 (G3,4), (W1) についてコメントする。いくつかの具体例の理論的評価および数値計算例が [8] にあるが、ここでは模式的な図で説明する。以下の図でグレーの領域が  $\Omega(t)$  であり、黒線が境界  $\mathcal{P}(t)$  である。

(G3) が成立しない場合、ある  $\theta_j$  に対して、 $g(\theta_j + \pi, \lambda) \gg g(\theta_j, \lambda)$  であるとする、図 2 のように下にある長い辺 (曲率は小さい) のほうが、その上にある平行な短い辺よりも早く上方に動くことになり、二辺の間が潰れ領域が分裂する。解多角形が分裂した場合でも、個々の領域が再び許容多角形になっていればそれぞれ解多角形の時間発展を追跡することは可能であろう。ウルフ図形が長方形の場合には、線分状に潰れた部分を取り除けば

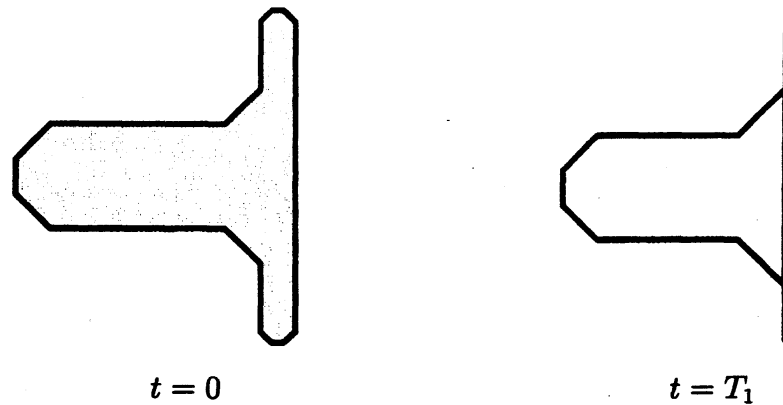


図 3: 条件 (G4) が成立しない場合.

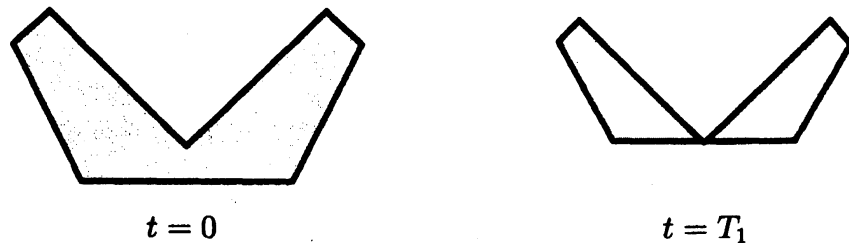


図 4: 条件 (W1) が成立しない場合.

そのように解を延長することもできる。しかし一般にはこの図のように、分裂した各々の領域の許容性は崩れる。(G4)が成立しない場合、初期図形によっては退化縮退が起きる。図3では、右側で退化縮退が起き解多角形の一部が線状に潰れている。この場合も極限図形は許容多角形にはなっていない。(W1)が成立しない場合、ウルフ図形は原点对称ではないので、必ずしも平行な辺を持たない。図4では上部の凹んでいる部分の曲率は0であり法線方向には動かない。よって、下部の辺とこの二辺の間の頂点が接触を起こすことになり、(G3)が成立しない場合と同様領域が分裂する。更にこの場合も分裂した各々の領域は非許容多角形となっている。

以上のように、条件 (G3,4), (W1) を仮定しない場合には  $t \rightarrow T_1$  での極限図形が許容多角形ではなくなることが起こりうる。定理1の条件は、許容多角形のクラスで解き続けるためには本質的であることがわかる。次節では、定理1が成立する場合に限定して、解の挙動について考察する。

## 5 解多角形の挙動

初期図形の辺の個数は有限個であり、ここで考えている運動では時間発展の途中で辺が増えることはない。よって、辺の個数は時間に関して単調非増大である。また、定理1から辺の消滅は有限時間で起きるので、辺が消滅する時刻の有限列、 $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_m < \infty$ を得る。また、 $T_0 = 0$ とする。ただし、定理1よりそれぞれの時刻において消える辺は、曲率が0の辺のみであり、曲率が0の辺の数も時間と共に減少していく。つまり、解多角形は次第に辺の数を減らしながら、その形状を許容多角形のクラスの中でより単純な形へと変化させていき、最終的に $t = T_m$ で一点に収縮する。

では、この最終局面では解多角形はどのような形になっているだろうか？曲率が0の辺が減っていき時間発展の途中で無くなれば、その後有限時間で解多角形は一点に収縮する。曲率が0の辺が無くなった時点で全ての辺の曲率は正であるから、解多角形は一点に縮退する前に凸図形になっていることになる。このように、非凸図形が有限時間で凸図形になる現象を、以下“凸化現象”と呼ぶことにする。冒頭に挙げた図1の数値計算例では、非凸図形が凸になり、その後一点に縮退しているので、凸化現象が起きていることが分かる。それでは、(CCF) および (GCCF) では凸化現象が必ず起るであろうか？

基本的な性質が非常に似ている曲率流方程式に対する結果 ([7], [4]) からのアナロジーから、論文 [10], [5] にあるように凸化現象は成立すると考えられていた。これは、クリスタライン曲率流 (CCF) が曲率流方程式を近似する<sup>6</sup> といった結果 ([10]) から自然なものと考えられてきた。しかし、[11] で述べられているように非凸自己相似解が構成できる場合もあり、現在では一般に凸化現象は起きるとは限らないことが分かっている。それでは、解多角形はどの程度まで単純な形に到達するのであるだろうか？次に示すように、最終局面の解多角形の形状は、凸図形の他はもう1種類のみであることがわかる。

**定理2** 定理1と同じ仮定を課す。このとき、 $t \geq T_{m-1}$ での解多角形の形状は次の2通りに分類される。

- (1)  $t = T_{m-1}$ において解多角形は凸になり、その後、凸のまま $t \rightarrow T_m$ で1点に収縮する。
- (2)  $t = T_{m-1}$ において解多角形は、ある隣り合った2辺のみでクリスタライン曲率が0、その他の辺では正であり、 $t \rightarrow T_m$ で非凸のまま1点に収縮する。

(2)は、解多角形は凸化一步手前までは変形するが、最終的に一方所の角のみが凹んでいるような形のまま1点に収縮することがあることを主張している。非凸自己相似解は、 $m = 1$ とした(2)の場合の典型例である。また、この結果の系として、形状および曲率に関して次を得る。

**系3** 定理1と同じ仮定を課す。このとき、次を得る：

- (i)  $T_* \leq T_{m-1}$ が存在して、 $\forall t \geq T_*$ に対して各辺で $H_j(t) \geq 0$ である。

<sup>6</sup>ウルフ図形の辺の数を無限大にした極限で、(CCF)の解は曲率流方程式の解に収束する。



(ii)  $T^* \leq T_{m-1}$  が存在して、 $\forall t \geq T^*$  で解多角形は星状である。

上の系の  $T_*$  と  $T^*$  の順番は、初期図形に依存する。また、初期図形によっては同時に起きることもある。

以上より、解多角形の変形の様子は次のようにまとめることができる：解多角形は有限時間で星状になり、かつ全ての辺の曲率が非負となる。その後有限時間で一点に収縮する。その際の形状は、凸図形かあるいは、1つの角が凹んだ星状の非凸図形である。

## 6 おわりに

本小論では、許容多角形という多角形のクラスの中でクリスタライン曲率流方程式およびその一般化を考え、解の延長の条件および解多角形の形状変化について現時点で分かっている結果を述べた。次の興味として、常に凸化現象が成立するための十分条件を明らかにすることがある。非凸自己相似解の存在から、一般に凸化現象は起きないことが分かっているが、例えば初期多角形  $\Omega(0)$  が点対称であれば、定理 1 の条件下では常に凸化することがわかる。数値実験によると、点対称以外の多くの初期図形に対して凸化現象が観測されているので、例えば、凸化現象が成立するより広い初期図形のクラスの特徴付けが出来るのではないかと考えている。

また、条件 (G3,4),(W1) が成立しない場合に出現するような、非許容多角形の取り扱いについても考察する必要がある。[6] で既にこのタイプの非許容多角形が扱われているが、より一般的な枠組みで、辺の生成に関するメカニズムを明らかにする必要がある。これは次の観点からも重要である。数値計算などにおいて、滑らかな界面の運動をクリスタライン運動で近似するという方法がある。この場合、その近似法が途中で破綻することがないことを保証する必要がある。条件 (G3,4),(W1) が成立しないようなより広い運動法則での非許容多角形に対する枠組みを整備しておく必要があるだろう。

## 謝辞

今回、京都大学数理解析研究所 研究集会「波動現象の数理と応用」の招待講演者として呼んで頂き、大変感謝致します。講演の機会を与えてくださった田中光宏先生には改めてお礼申し上げます。また、本研究は科学研究費補助金 (課題番号:18740048) による援助を受けています。

## 参考文献

- [1] B. Andrews, Singularities in crystalline curvature flows, Asian J. Math. 6 (2002) 101–122.

- [2] S. B. Angenent and M.E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure, 2. Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal.* **108** (1989) 323–391.
- [3] S. Angenent and J. J. L. Velázquez, Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening, *Duke Math. J.* **77** (1995), no. 1, 71–110.
- [4] K.S. Chou and X.P. Zhu, A convexity theorem for a class of anisotropic flows of plane curves, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999) 139–154.
- [5] M.-H. Giga and Y. Giga, Crystalline and level set flow – convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane, *Free boundary problems: theory and applications, I* (Chiba, 1999), *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, **13**, Gakkōtoshō, Tokyo, (2000) 64–79.
- [6] M.-H. Giga, Y. Giga and H. Hontani, Self-similar expanding solutions in a sector for a crystalline flow, *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2005), no. 4, 1207–1226.
- [7] M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Differential Geometry* **26** (1987), 285–314.
- [8] C. Hirota, T. Ishiwata and S. Yazaki, Numerical study and examples on singularities of solutions to anisotropic crystalline curvature flows of nonconvex polygonal curves, to appear in *ASPM*.
- [9] H. Hontani, M.-H. Giga, Y. Giga and K. Deguchi, Expanding selfsimilar solutions of a crystalline flow with applications to contour figure analysis, *Discrete Appl. Math.* **147** (2005), no. 2-3, 265–285.
- [10] K. Ishii and H. M. Soner, Regularity and convergence of crystalline motion, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999) 19–37 (electronic).
- [11] T. Ishiwata, T.K. Ushijima, H. Yagisita and S. Yazaki, Two examples of nonconvex self-similar solution curves for a crystalline curvature flow, *Proc. Japan Acad. Vol. 80, Ser. A, No. 8* (2004) 151–154.
- [12] T. Ishiwata and S. Yazaki, On the blow-up rate for fast blow-up solutions arising in an anisotropic crystalline motion, *J. Comp. App. Math.* **159** (2003) 55–64.
- [13] T. Ishiwata and S. Yazaki, A fast blow-up solution and degenerate pinching arising in an anisotropic crystalline motion, submitted.
- [14] A. Stancu, Asymptotic behavior of solutions to a crystalline flow, *Hokkaido Math. J.* **27** (1998) 303–320.

- [15] J. E. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, Proceedings of the Conference on Differential Geometry, Rio de Janeiro, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991) 321–336, Pitman London.